[1] 以下の問いに答えよ．

(1) △ABC において，頂点 A, B, C に向かい合う辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c で表し，∠A, ∠B, ∠C の大きさを，それぞれ A, B, C で表す．

$$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 7 : 8$$

が成り立つとき，ある正の実数 k を用いて

$$a = \boxed{(\ 1\ )}k, \quad b = \boxed{(\ 2\ )}k, \quad c = \boxed{(\ 3\ )}k$$

と表すことができるので，この三角形の最も大きい角の余弦の値は $-\dfrac{\boxed{(\ 4\ )}}{\boxed{(\ 5\ )}}$ であり，正接の値は $-\boxed{(\ 6\ )}\sqrt{\boxed{(\ 7\ )}}$ である．さらに △ABC の面積が $54\sqrt{3}$ であるとき，$k = \boxed{(\ 8\ )}$ となるので，この三角形の外接円の半径は $\boxed{(\ 9\ )}\sqrt{\boxed{(10)}}$ であり，内接円の半径は $\boxed{(11)}\sqrt{\boxed{(12)}}$ である．

(2) m, n を自然数とし，p を実数とする．平面上の点 $\left(p, \dfrac{p}{2}\right)$ に関して点 (m, n) と対称な点が $\left(-3m^2 - 4mn + 5m,\ n^2 - 3n - 3\right)$ であるとき，関係式

$$\boxed{(13)}m^2 + 2\left(\boxed{(14)}n - \boxed{(15)}\right)m + 2\left(n + \boxed{(16)}\right)\left(n - \boxed{(17)}\right) = 0$$

が成り立つ．ゆえに $m = \boxed{(18)}$，$n = \boxed{(19)}$，$p = \boxed{(20)}\boxed{(21)}$ である．

[2] 数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ とし，さらに $S_0 = 0$ と定める．$\{a_n\}$ は，

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+3)a_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

を満たすとする．

(1) $a_1 = \dfrac{\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}}$ である．また $n \geqq 1$ に対して $a_n = S_n - S_{n-1}$ であるから，関係式

$$\left(n + \boxed{(24)}\right)a_{n+1} = \left(n + \boxed{(25)}\right)a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (*)$$

が得られる．数列 $\{b_n\}$ を，

$$b_n = n(n+1)(n+2)a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定めると，$b_1 = \boxed{(26)}$ であり，$n \geqq 1$ に対して $b_{n+1} = \boxed{(27)}\, b_n$ が成り立つ．ゆえに

$$a_n = \frac{\boxed{(28)}}{n(n+1)(n+2)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が得られる．

次に，数列 $\{T_n\}$ を $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{(k+3)(k+4)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ で定める．

(2) $(*)$ より導かれる関係式

$$\frac{a_k}{k+3} - \frac{a_{k+1}}{k+4} = \frac{\boxed{(29)}\, a_k}{(k+3)(k+4)} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

を用いると，

$$T_n = A - \frac{\boxed{(30)}}{\boxed{(31)}\,(n+p)(n+q)(n+r)(n+s)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が得られる．ただしここに，$A = \dfrac{\boxed{(32)}}{\boxed{(33)}\boxed{(34)}}$ であり，$p < q < r < s$ として

$p = \boxed{(35)}$，$q = \boxed{(36)}$，$r = \boxed{(37)}$，$s = \boxed{(38)}$ である．

(3) 不等式

$$\left|T_n - A\right| < \frac{1}{10000(n+1)(n+2)}$$

を満たす最小の自然数 n は $n = \boxed{(39)}\boxed{(40)}$ である．

[3] 袋の中に，1 から 9 までの数字を重複なく 1 つずつ記入したカードが 9 枚入っている．この袋からカードを 1 枚引き，カードに記入された数字を記録してから袋に戻すことを試行という．この試行を 5 回 繰り返し行う．また以下の (a), (b) に従い，各回の試行後の点数を定める．ただし，1 回目の試行前の点数は 0 点とする．

(a) 各回の試行後，その回の試行で記録した数字と同じ数字のカードをそれまでに引いていない場合は，その回の試行前の点数にその回の試行で記録した数字を加える．

(b) 各回の試行後，その回の試行で記録した数字と同じ数字のカードをそれまでに引いている場合は，その回の試行前の点数にその回の試行で記録した数字を加え，さらに 1000 点を加える．

(1) 3 回の試行後の点数は 23 点であった．それまでに引いた 3 枚のカードに記入された数字は，小さい順に $\boxed{(41)}$，$\boxed{(42)}$，$\boxed{(43)}$ である．これら 3 つの数字の分散は $\dfrac{\boxed{(44)}\boxed{(45)}}{\boxed{(46)}}$ である．

(2) 4 回の試行後の点数が 23 点となる確率は $\dfrac{\boxed{(47)}}{\boxed{(48)}\boxed{(49)}\boxed{(50)}}$ である．

(3) 2 回の試行後の点数が 8 点または 1008 点となる確率は $\dfrac{\boxed{(51)}}{\boxed{(52)}\boxed{(53)}}$ である．

(4) 2 回の試行後の点数が 8 点または 1008 点であるとき，5 回の試行後の点数が 2023 点となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{(54)}\boxed{(55)}}{\boxed{(56)}\boxed{(57)}\boxed{(58)}\boxed{(59)}}$ である．

[4] $x,\ y$ を正の実数とし，$z = 2\log_2 x + \log_2 y$ とする．また k を正の実数とする．

(1) x, y が $x+y=k$ を満たすとき，z の取りうる値の最大値 z_1 およびそのときの x の値を，k を用いて表せ．

(2) x, y は $x+y=k$ または $kx+y=2k$ を満たすとする．このとき，z の取りうる値の最大値 z_2 が **(1)** の z_1 と一致するための必要十分条件を，k を用いて表せ．

(3) n を自然数とし，$k = 2^{\frac{n}{5}}$ とする．**(2)** の z_2 について，$\dfrac{3}{2} < z_2 < \dfrac{7}{2}$ を満たす n の最大値および最小値を求めよ．なお，必要があれば $1.58 < \log_2 3 < 1.59$ を用いよ．

[5] xyz 空間における 8 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(1,1,0)$, $\mathrm{C}(0,1,0)$, $\mathrm{D}(0,0,1)$, $\mathrm{E}(1,0,1)$, $\mathrm{F}(1,1,1)$, $\mathrm{G}(0,1,1)$ を頂点とする立方体 OABC-DEFG を考える．また p と q は，$p>1, q>1$ を満たす実数とし，3 点 P, Q, R を $\mathrm{P}(p,0,0)$, $\mathrm{Q}(0,q,0)$, $\mathrm{R}\left(0,0,\dfrac{3}{2}\right)$ とする．

(1) a,b を実数とし，ベクトル $\overrightarrow{n}=(a,b,1)$ は 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の両方に垂直であるとする．a,b を，p,q を用いて表せ．

以下では 3 点 P, Q, R を通る平面を α とし，点 F を通り平面 α に垂直な直線を ℓ とする．また，xy 平面と直線 ℓ の交点の x 座標が $\dfrac{2}{3}$ であるとし，点 B は線分 PQ 上にあるとする．

(2) p および q の値を求めよ．

(3) 平面 α と線分 EF の交点 M の座標，および平面 α と直線 FG の交点 N の座標を求めよ．

(4) 平面 α で立方体 OABC-DEFG を 2 つの多面体に切り分けたとき，点 F を含む多面体の体積 V を求めよ．

[6] a, b を実数の定数とする．また，x の関数 $f(x) = x^3 - ax + b$ は

$$a = \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{3}{2} b \left| x^2 + x \right| - f(x) \right\} dx$$

を満たすとする．

(1) b を，a を用いて表せ．

(2) $y = f(x)$ で定まる曲線 C と x 軸の共有点の個数がちょうど 2 個となるような a の値を求めよ．また，曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．なお，必要があれば $\alpha < \beta$ を満たす実数 α, β に対して成り立つ公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 (x - \beta) dx = -\frac{1}{12} (\beta - \alpha)^4$$

を用いてもよい．